Γραμμική Άλγεβρα 1 3/11/15

Ανάλυση: Έστω $A \in F^{\nu\times\mu}$, $b \in F^{\nu\times 1}$ και (Σ) το σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix}=b$

1) Ισχυρισμός: Έστω $E \in F^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος. Τότε το (Σ) ισοδύναμο με το σύστημα $(EA)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_\mu\end{pmatrix}=Eb$

Απόδειξη

$$A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=b \Rightarrow E\left(A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}\right)=Eb \Rightarrow (EA)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_2\end{pmatrix}=Eb$$

Αντίστροφο $EA\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=Eb \Rightarrow E^{-1}(EA)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=E^{-1}(Eb) \Rightarrow$

$$(E^{-1}\cdot E)A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=E^{-1}\cdot Eb \Rightarrow I_\nu\cdot A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=I_\nu\cdot b \Rightarrow A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_\mu\end{pmatrix}=b$$

2) Παρατήρηση:

Αν A ισχυρά κλιμακωτός, τότε είναι εύκολο να βρούμε το σύνολο λύσεων S του (Σ).

Παράδειγμα

i) $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\0&0&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ισχυρά κλιμακωτός

$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b$ δηλ. $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3=1\\0x_1+0x_2+0x_3=1\end{cases}$

Σύνολο λύσεων $S=\emptyset$, δηλαδή το σύστημα αδύνατο

ii) $A=\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&5\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ (ισχυρά κλιμακωτός)

Το σύστημα $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=b$ δηλ. $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_4=4\\x_3+5x_4=2\end{cases}$

Σύνολο λύσεων $S=\left\{\begin{bmatrix}4-3\xi_2-2\xi_4\\ \xi_2\\ 2-5\xi_4\\ \xi_4\end{bmatrix} \middle| \xi_2,\xi_4 \in F\right\}$

Συμπέρασμα 1+2. Για επίλυση του Σ ξεκινάμε από τον επαυξημένο πίνακα $C=[A|b]$ και με γραμμοπράξεις (μέθοδος απαλοιφής Gauss) καταλήγουμε σε ισχυρά κλιμακωτό.

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

Άσκηση 6 → Θέμα Σεπτέμβριο

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -1 & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha & -2 \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - \alpha r_1} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha & -2 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{bmatrix} = B$$

Τρεις Περιπτώσεις

① Περίπτωση $\alpha = -1$ τότε η τελευταία εξίσωση είναι

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$ άρα το σύστημα αδύνατο.

② Περίπτωση $\alpha = 1$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 (-\frac{1}{2} r_2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισχυρά κλιμακωτός

Επομένως το σύστημα είναι ισοδύναμο με το $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

με σύνολο λύσεων $S = \left\{ \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \\ 1-\xi_4 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \xi_2, \xi_4 \in \mathbb{R} \right\}$

③ Περίπτωση $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$, άρα $1-\alpha^2 \neq 0$

$$B \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{(1-\alpha^2)} r_2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1+\alpha} \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - \alpha r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-\frac{\alpha}{1+\alpha} \\ & & * & & \\ & & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 (-\frac{1}{2}) r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-\frac{\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/1+\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha & -\frac{\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad -\alpha x_4 = -\dfrac{\alpha}{\alpha+1} \\ \quad x_2 \quad + x_4 = \dfrac{1}{\alpha+1} \\ \quad\quad x_3 + \alpha x_4 = 1 \end{cases}$$ με σύνολο λύσεων

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha}{\alpha+1} + \alpha \xi_4 \\ \dfrac{1}{\alpha+1} - \xi_4 \\ 1 - \alpha \xi_4 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \xi_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \times \mu}$, $b \in F^{\nu \times 1}$. Τότε το σύστημα

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix} = b$ έχει μη κενό σύνολο λύσεων αν και μόνο αν

βαθμίδα(A) = βαθμίδα(A/b) (*)

Απόδειξη (Βασικές ιδέες)

Περίπτωση 1: A ισχυρά κλιμακωτός. Είχαμε βλέπουμε από τη μορφή του A ότι το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν για κάθε μηδενική γραμμή του A (αν υπάρχουν), το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα b είναι ίσο με 0_F. Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το (*).

Περίπτωση 2. Γενική περίπτωση. Με γραμμοπράξεις και μέθοδο απαλοιφής Gauss ανάγεται στην Περίπτωση 1, γιατί οι γραμμοπράξεις δεν αλλάζουν την βαθμίδα και είδαμε ότι αν $E \in F^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος, τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες $[A/b]$ και $[EA/Eb]$ είναι ισοδύναμα.

Παρατήρηση: Φανερά οι κλιμακωτοί πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)
Έστω $B, B' \in F^{\nu \times \mu}$ ισχυρά κλιμακωτοί. Αν B, B' γραμμοϊσοδύναμοι τότε $B = B'$

Πόρισμα: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$. Τότε <u>υπάρχει μοναδικός</u> $B \in F^{\nu \times \mu}$ ισχυρά κλιμακωτός ώστε A, B γραμμοϊσοδύναμοι

Απόδειξη i) Ύπαρξη B, από αλγόριθμο απαλοιφής Gauss.
ii) Μοναδικότητα από την προηγούμενη πρόταση

Θα δείξω για $A \in F^{\nu \times \nu}$ ότι A αντιστρέφεται αν και μόνο αν βαθμίδα$(A) = \nu$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \nu}$ <u>ισχυρά κλιμακωτός</u>. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
i) A αντιστρέφεται
ii) βαθμίδα $(A) = \nu$
iii) $A = I_\nu$

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii)
Έστω ότι A αντιστρέφεται και βαθμίδα$(A) < \nu$ θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Αφού A κλιμακωτός $\nu \times \nu$ και βαθμίδα$(A) < \nu \Rightarrow$ έχουμε ότι η τελευταία γραμμή του A είναι μηδενική. Δηλαδή $A = \begin{bmatrix} & * & \\ 0 & 0 \ldots & 0 \end{bmatrix}$ άρα, για κάθε $B \in F^{\nu \times \nu}$ το στοιχείο-(ν, ν)-στοιχείο του AB είναι $0 \cdot b_{1\nu} + 0 b_{2\nu} + \ldots + 0 b_{\nu\nu} = 0$. Άρα $AB \neq I_\nu$ αντίφαση, αφού A αντιστρέφεται

ii => iii

Αφού ο A είναι κλιμακωτός, δεν έχει μηδενικές γραμμές και κάθε στήλη έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο =>

$A = I_\nu$

iii => i

Ισχύει γιατί $I_\nu \cdot I_\nu = I_\nu$, άρα ο I_ν αντιστρέψιμος

<u>Πρόταση</u> (χωρίς απόδειξη)

Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος

ii) βαθμίδα$(A) = \nu$

iii) Ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν

iv) Ο πίνακας A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

v) Το ομογενές σύστημα $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Απόδειξη (κάποιες ιδέες)

i) => ii) $B = \underbrace{E_1 \cdot E_2 \cdot E_\nu \cdot A}_{\text{Αντιστρέψιμοι}}$

Παράδειγμα: Είναι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}4&7&5\\3&6&2\\1&1&3\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{3\times 3}$ αντιστρέψιμος

Λύση

Υπολογίζουμε βαθμίδα(A). Αν είναι 3, ο A αντιστρέφεται, αλλιώς ο A δεν αντιστρέφεται.

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}1&1&3\\3&6&2\\4&7&5\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2-3r_1} \cdots \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3-4r_1} \begin{bmatrix}1&1&3\\0&3&-7\\0&3&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3-r_2} \begin{bmatrix}1&1&3\\0&3&-7\\0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&-7/3\\0&0&0\end{bmatrix}$$ κλιμακωτός

Άρα βαθμίδα(A) = 2 ⇒ A δεν αντιστρέφεται.

Παρατήρηση

Έστω $A\in F^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος. Από προηγούμενη πρόταση A γραμμοϊσοδύναμος με τον I_ν. Άρα υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots E_N$ ώστε $I_\nu = E_1 E_2 \cdots E_N \cdot A$ (1)

Πολλαπλασιάζοντας την (1) ~~αριστερά~~ δεξιά με τον A^{-1} παίρνουμε A^{-1} παίρνουμε

$A^{-1} = E_1 \cdot E_2 \cdots E_N \cdot I_\nu$

Άρα οι γραμμοπράξεις που μας πάνε από τον A στο I_ν, επίσης μας πάνε από το I_ν στον A^{-1}.

Παράδειγμα: Έστω $A=\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}$ εύκολα βλέπουμε βαθμίδα(A) = 2, άρα A αντιστρέφεται. Υπολογίστε τον A^{-1} (με γραμμοπράξεις στον 2×4

$(A/I_2) = \left(\begin{matrix}1&4\\1&5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right)$ (I_2/A^{-1})

(I_2 / A^{-1})

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - 4r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Άρα $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 4 φροντιστηριακής ασκήσεις #2

<u>Για τον B</u>

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(B / I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \mapsto -r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_3} \quad \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Άρα ο B αντιστρέφεται και $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Άσκηση 1

Έστω π.χ. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ο B είναι κλιμακωτός

με 2 μη μηδενικές γραμμές, άρα βαθμίδα$(B) = 2$

Από θεωρία οι γραμμοπράξεις δεν αλλάζουν βαθμίδα

$$B \xrightarrow{r_2 \mapsto r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 + r_2} \cdots \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$